

*Comparación de Pronósticos con Modelos TAR y TARX
en Algunas Series Económicas Colombianas*

HOLMES FABIAN MOLINA ALAPE

CÓDIGO: 070250212011



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
MAYO 31 DE 2018

*Comparación de Pronósticos con Modelos TAR y TARX
en Algunas Series Económicas Colombianas*

HOLMES FABIAN MOLINA ALAPE

CÓDIGO: 070250212011

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

DIRECTOR

JOAQUÍN GONZÁLEZ BORJA

PROFESOR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA




UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
MAYO 31 DE 2018

Título en español

Comparación de Pronósticos con Modelos TAR y TARX en Algunas Series Económicas Colombianas.

Resumen: En este trabajo de grado se presenta una comparación del cálculo de pronósticos con modelos de series de tiempo TARX y TAR con dos regímenes usando el crecimiento de la deuda externa pública e inversión privada trimestral en Colombia entre 1994 y 2007. La estimación de parámetros de los modelos y el cálculo de pronósticos se realizaron a través de métodos Bayesianos y técnicas MCMC. Un experimento de simulación muestra que la metodología utilizada es muy efectiva. Por último, los resultados con los datos empíricos muestran evidencia de una relación no lineal e inversa entre las dos series de tiempo bajo estudio, y en cuanto a pronósticos a corto plazo el modelo TARX presenta un mejor comportamiento respecto a los TAR.

Palabras clave: Modelos TARX y TAR, métodos Bayesianos, técnicas MCMC, deuda externa pública, inversión privada, estimación de parámetros, cálculo de pronósticos.



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: COMPARACIÓN DE PRONÓSTICOS CON MODELOS TAR Y TARX EN
ALGUNAS SERIES ECONÓMICAS COLOMBIANA

AUTORES: HOLMES FABIAN MOLINA ALAPE Cód. 070250212011

DIRECTOR: JOAQUIN GONALEZ BORJA

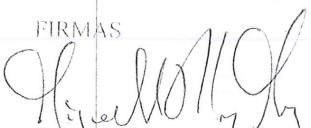
JURADOS: MIGUEL ARMANDO RODRÍGUEZ
JAIR ALFONSO CLAVIJO


CALIFICACIÓN: 4.9


☒ APROBÓ ☐ REPROBÓ


OBSERVACIONES: *Nota: MERITORIO.*

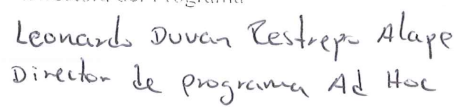
FIRMAS


MIGUEL ARMANDO RODRÍGUEZ
Jurado 1


JAIR ALFONSO CLAVIJO
Jurado 2


JOAQUIN GONALEZ BORJA
Director del Trabajo


YURI MARCELA GARCÍA S.
Directora del Programa


Leonardo Duvan Restrepo Alape
Director de programa Ad Hoc

Ciudad y fecha: Ibagué, 29 de Junio de 2018

FIGURA 1

FORMULARIO PARA EVALUACIÓN DE TRABAJOS DEL GRADO HOJA No. 2

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: MIGUEL ARMANDO RODRÍGUEZ

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4.9 Cuatro punto nueve

FIRMA DEL JURADO Miguel Armando Rodríguez Márquez

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: JAIRO ALFONSO CLAVIJO

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4.8 Cuatro ocho

FIRMA DEL JURADO Jairo Alfonso Clavijo

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO: 4.85
Cuatro ochenta y cinco

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

Calificación menor de tres cero (3.0)	REPROBADO
Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9)	APROBADO
Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4)	SOBRESALIENTE
Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9)	MERITORIO
Calificación de cinco cero (5.0)	LAUREADO

FECHA DE SUSTENTACIÓN Junio 29 de 2018

FIGURA 2

Dedicado

A Dios, mi madre Beatriz Alape López y Yudy Tatiana Orjuela Villanueva quienes son mi fortaleza.

Agradecimientos

A la Universidad del Tolima y Facultad de Ciencias por su valioso aporte a mi formación profesional.

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	II
Índice de figuras	III
Objetivos	V
Introducción	VI
1. Consideraciones Teóricas	1
1.1. Especificación de los modelo TARX y TAR	1
1.2. La función de verosimilitud condicional	2
1.3. Estimación Bayesiana de los parámetros.	2
1.4. Algoritmo MCMC para la estimación de los parámetros	4
1.5. Validación del modelo	4
1.6. Cálculo de la densidad predictiva	5
1.7. Algoritmo para la estimación de pronósticos	6
2. El estudio de Simulación	7
3. Una aplicación en economía	13
3.1. Análisis exploratorio de las series de tiempo	13
3.2. Ajuste y pronósticos de un Modelo TARX	16
3.3. Ajuste y pronósticos de un Modelo TAR	21
Conclusiones	27
Bibliografía	28

Índice de tablas

2.1. Resultados de la simulación del modelo TARX obtenido de 100 repeticiones con $n=300$	8
2.2. Pronóstico para la variable X_t	12
2.3. Pronóstico para la variable Z_t	12
3.1. Prueba de no linealidad de umbrales con covariable	16
3.2. Parámetros estimados del modelo TARX	17
3.3. Pronóstico ex post del modelo TARX para la variable de interés.	21
3.4. Pronóstico ex post del modelo TARX para la variable umbral.	21
3.5. Prueba de no linealidad de umbrales	21
3.6. Parámetros estimados del modelo TAR.	22
3.7. Pronóstico ex post del modelo TAR para la variable de interés.	26
3.8. Pronóstico ex post del modelo TAR para la variable de umbral.	26

Índice de figuras

1.	I
2.	II
2.1.	Variable de interés (a) , variable umbral (b) . del modelo simulado TARX con n=300	7
2.2.	FAC para algunas cadenas del modelo simulado TARX	9
2.3.	Gráficas de las muestras simuladas MCMC de las últimas 4000 iteraciones .	10
2.4.	Traza, histograma y box plot de los residuales simulados	10
2.5.	FAC de los residuales (a) , FACP de los residuales (b) , FAC de los residuales al cuadrado (c) , FACP de los residuales al cuadrado (d)	11
2.6.	Gráfico CUSUM de los residuos del modelo simulado TARX.	11
3.1.	Deuda externa pública trimestral (a) , inversión privada trimestral (b)	13
3.2.	Crecimiento inversión privada (a) , crecimiento deuda externa pública (b) .	15
3.3.	Función de autocorrelación muestral (a) , Función de autocorrelación parcial muestral (b)	15
3.4.	Crecimiento FBKF/PIB —, Crecimiento DEXP/PIB rezagada dos trimes- tre -o-	16
3.5.	Gráfica cumuplot para verificar la convergencia de las cadenas del Modelo TARX.	18
3.6.	Gráficas de las muestras a posteriori del modelo TARX.	19
3.7.	Traza, histograma y box plot de los residuales del modelo TARX	19
3.8.	FAC de los residuales (a), FACP de los residuales (b), FAC de los residuales al cuadrado (c), FACP de los residuales al cuadrado (d), del modelo TARX	20
3.9.	Gráfico CUSUM de los residuales del Modelo TARX.	20
3.10.	Crecimiento FBKF/PIB —, Crecimiento DEXP/PIB rezagada un trimestre -o-	22
3.11.	Traza de las muestras a posteriori del modelo TAR.	23

3.12. Gráfica cumuplot para verificar la convergencia de las cadenas del modelo TAR.	24
3.13. Traza, histograma y box plot de los residuales del modelo TAR	24
3.14. FAC de las residuales (a), FACP de los residuales (b), FAC de los residuales al cuadrado (c), FACP de los residuales al cuadrado (d), del modelo TAR .	25
3.15. Gráfico CUSUM de los residuales estandarizados del modelo TAR.	25
16.	30
17.	31
18.	32

Objetivos

Objetivo General

Comparar el modelado y el cálculo de pronósticos con modelos TARX y TAR en la deuda externa pública e inversión privada trimestral en Colombia 1994-2007.

Objetivos Específicos

- Implementar la metodología Bayesiana y las técnicas MCMC utilizadas por Chen y Lee (1995), Chen (1998) y adaptar la metodología del cálculo de pronósticos dada por Calderón y Nieto (2017), para el estudio de los modelos TARX y TAR.
- Determinar la eficiencia de la metodología mediante un estudio de simulación.
- Ilustrar la metodología propuesta con un ejemplo empírico en el sector económico en Colombia.

Introducción

Los modelos de series de tiempo no lineales fueron mencionados por primera vez a principios del siglo XX, estos han adquirido gran importancia a través del tiempo, debido a que algunos fenómenos naturales y sociales pueden ser explicados adecuadamente por medio de estos modelos, como se presentan en la series hidrológicas, meteorológicas, biológicas, económicas, físicas, financieras, de procesos químicos, entre otras. Los modelos no lineales TAR (Threshold AutoRegressive models) fueron propuestos por Tong (1978), estos modelos tienen la capacidad de capturar asimetrías, bimodalidad, fenómenos de saltos, irreversibilidad en el tiempo y conglomerados de volatilidad. Estos modelos asumen que los valores de un proceso estocástico (proceso de umbral) Z_t determina la dinámica del proceso estocástico X_t (proceso de interés).

Chen y Lee (1995) presentan una metodología Bayesiana para estimar los parámetros en conjunto del modelo TAR, Chen (1998) realiza inferencia estadística Bayesiana y técnicas MCMC para modelos TARX, Nieto (2005) implementa una metodología Bayesiana y técnicas MCMC para estimar parámetros y datos faltantes en forma simultánea en modelos TAR. Mientras que, en Nieto (2008) presenta la fase de pronósticos en modelos TAR, Hansen (2011) da una revisión extensiva de modelos TAR en economía y Chen et al. (2011) dan una revisión similar de los modelo TAR en finanzas, Tong (2015) da una amplia revisión de la literatura que se ha desarrollado respecto a los modelo TAR desde su aparición. Hoyos (2007) presenta un estudio entre la tasas de interés y el índice de producción industrial para Colombia con modelos TAR. Vivas (2011) mediante un modelo TAR presenta un análisis del desempleo trimestral y el índice de confianza industrial trimestral en colombia, trabajos que siguen la metodología de Nieto (2005), Rubio (2003) examina la relación entre la deuda externa y la inversión privada con un modelo regresión lineal, y evidenció que la inversión privada está relacionada inversamente con el flujo de endeudamiento público, por último; Salamanca y Monroy (2008) analiza la relación existente entre la deuda externa pública y la inversión privada en Colombia a partir del modelo TAR siguiendo la metodología de Nieto (2008) pero no desarrolla la fase de pronósticos.

Se busca en este trabajo de grado determinar si al incluir la variable umbral en el modelo TAR como covariable en forma autorregresiva posee algún impacto sobre el modelamiento y pronósticos de las series estudiadas por Salamanca y Monroy (2008) y se utiliza la metodología propuesta por Chen y Lee (1995), Chen (1998) y se adapta la fase de pronósticos de Calderón y Nieto (2017). El trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentan la especificación del modelo

TARX y TAR, la función de verosimilitud condicional, la estimación Bayesiana de los parámetros, el algoritmo para generar las muestras MCMC, la distribución predictiva del modelo TARX y el algoritmo de pronósticos. En el segundo capítulo se realiza un estudio de simulación para determinar la eficiencia de la metodología descrita en el capítulo 1, en el tercer capítulo se realiza una aplicación empírica de la deuda externa e inversión privada en frecuencia trimestral en Colombia entre el periodo 1994-2008.

CAPÍTULO 1

Consideraciones Teóricas

1.1. Especificación de los modelo TARX y TAR

Sean $\{X_t\}$, $\{Z_t\}$ procesos estocásticos relacionados por la siguiente ecuación

$$X_t = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{u=1}^{q_j} b_u^{(j)} Z_{t-u} + h^{(j)} \epsilon_t, \quad (1.1)$$

si $Z_{t-d} \in (r_{j-1}, r_j]$ para $j = 1, \dots, l$, decimos que los valor umbrales r_j ($j = 1, \dots, l$) satisfacen que $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_{l-1} < r_l = \infty$ y definen l regímenes, d es un entero no negativo llamado parámetro de rezago y determina el tiempo de rezago para el cual la variable umbral Z_t , tiene un impacto sobre la estructura de la variable de Interés X_t . La variable umbral se considera como covariable en forma autorregresiva, es decir $\{Z_t\}$ es exógena para $\{X_t\}$, en el sentido de que no hay retroalimentación de $\{X_t\}$ hacia $\{Z_t\}$. Los números enteros no negativos p_1, \dots, p_l , q_1, \dots, q_l denotan, los órdenes autorregresivos del modelo los órdenes autorregresivos, el valor de rezago d , los valores umbrales $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{l-1})$ y el número de regímenes l son llamados parámetros estructurales.

Los coeficientes autorregresivos $a_i^{(j)}$, $b_u^{(j)}$ y $h^{(j)}$ para $i = 1, \dots, p_j$, $j = 1, \dots, l$ y $u = 1, \dots, q_j$ son números reales y son llamados los parámetros no estructurales del modelo. Adicionalmente, $\{\epsilon_t\}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza uno e independientes de $\{Z_t\}$. Se simboliza $TARX(l, p_1, \dots, p_l; q_1, \dots, q_l)$ para denotar este modelo y se dice que $\{X_t\}$ es un modelo autorregresivo con entrada exógena de umbrales con $\{Z_t\}$ su proceso umbral.

Se define el vector de parámetros no estructurales del modelo TARX como $\theta_{ne} = (A'_1, A'_2, \dots, A'_l; B'_1, B'_2, \dots, B'_l; \mathbf{h}')'$ donde $A_j = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{p_j}^{(j)})$, $B_j = (b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, \dots, b_{q_j}^{(j)})$, para $j = 1, \dots, l$ y $\mathbf{h} = ((h^{(1)})^2, (h^{(2)})^2, \dots, (h^{(l)})^2)$ y $\theta_e = (l, d, \mathbf{r}', p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l)'$ como el vector de parámetros estructurales. Se denota $\theta = (\theta_x, \theta_z)$ como el vector de parámetros completo, donde $\theta_x = (\theta_{ne}, \theta_e)$ y θ_z es el vector de parámetros del proceso estocástico $\{Z_t\}$. Se asume que $\{Z_t\}$ es una cadena de Markov homogénea de orden p , con distribución inicial $f_1(z, \theta_z)$ y distribución kernel $f(z_t | z_{t-1}, \dots, z_{t-p}, \theta_z)$.

Si en la ecuación (1.1) se suprime la expresión $\sum_{u=1}^{q_j} b_u^{(j)} Z_{t-u}$, entonces se tiene un modelo TAR, y se simboliza $TAR(l, p_1, \dots, p_l)$. Se dice que $\{X_t\}$ es un modelo autorregresivo de umbrales con $\{Z_t\}$ su proceso umbral.

1.2. La función de verosimilitud condicional

Sean $x_{1,T} = (x_1, \dots, x_T)$ y $z_{1,T} = (z_1, \dots, z_T)$ vectores de datos observados para los procesos $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$, respectivamente, en el periodo muestral $t = 1$ hasta $t = T$. Asumimos que el mecanismo probabilístico que genera a $z_{1,T}$ no depende de θ_x y la densidad conjunta de $x_{1,T}$ condicional sobre $z_{1,T}$ y θ_x no dependa de θ_z . Con estas condiciones, se puede ver que es posible estimar, inicialmente los parámetros de $\{Z_t\}$ y luego condicional sobre estos parámetros, se procede a estimar los parámetros de los modelo TARX considerando la función de verosimilitud condicional

$$f(x_{1,T}, z_{1,T} | \theta) = f(z_{1,T} | \theta_x, \theta_z) f(x_{1,T} | z_{1,T}, \theta_x, \theta_z) = f(z_{1,T} | \theta_z) f(x_{1,T} | z_{1,T}, \theta_x)$$

Nuestro interés radica en calcular la función de verosimilitud condicional para el modelos TARX es decir $f(x_{1,T} | z_{1,T}, \theta_x)$ además asumimos que los primeros K valores de $x_{1,T}$, $x_{1,K} = (x_1, \dots, x_K)$ son fijos y conocidos con $K = \max\{p_j, q_j, d\}$, $j = 1, \dots, l$. Ahora como $\{\epsilon_t\}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza uno se tiene que para $t = (K+1), \dots, T$, $f(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1, z_{1,T}, \theta_x)$ se distribuye como una normal con media

$$\mu_t = a_0^{(j_t)} + \sum_{i=1}^{p_{j_t}} a_i^{(j_t)} X_{t-i} + \sum_{u=1}^{q_{j_t}} b_u^{(j_t)} Z_{t-u}$$

y varianza $(h^{(j_t)})^2$. La sucesión $\{j_t\}$ es la serie de tiempo observada para el proceso estocástico $\{J_t\}$ (sucesión de variables indicadoras definidas como $J_t = j$ si $Z_{t-d} \in (r_{j-1}, r_j]$ para algún $j = 1, \dots, l$) luego

$$\begin{aligned} f(x_{K+1,T} | x_{1,K}, z_{1,T}, \theta_x) &= (2\pi)^{-\left(\frac{T-K}{2}\right)} \prod_{t=K+1}^T (h^{(j_t)})^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=K+1}^T \left(\frac{x_t - \mu_t}{h^{(j_t)}} \right)^2 \right\} \\ &= (2\pi)^{-\left(\frac{T-K}{2}\right)} \prod_{j=1}^l (h^{(j)})^{-n_j} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l (\mathbb{X}_j - A_j^* B_j^*)' ((h^{(j)})^{-2} \mathbb{I}_{n_j}) (\mathbb{X}_j - A_j^* B_j^*) \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $a_t^{*'} = (1, x_{t-1}, \dots, x_{t-p_j}, z_{t-1}, \dots, z_{t-q_j})$, $A_j^* = (a_{t_1,j}^*, \dots, a_{t_{n_j,j}}^*)$, $B_j^* = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_{p_j}^{(j)}, b_1^{(j)}, \dots, b_{q_j}^{(j)})'$, $\mathbb{X}_j^* = (x_{t_1,j}, \dots, x_{t_{n_j,j}})^*$, $\{t_{1,j}, \dots, t_{n_j,j}\}$ son los índices en el tiempo, donde $Z_{t-d} \in (r_{j-1}, r_j]$ y n_j es el número de observaciones en el régimen j ($j = 1, \dots, l$).

1.3. Estimación Bayesiana de los parámetros.

En esta sección encontraremos las distribuciones a posteriori del vector θ_x y se implementa el muestreador de Gibbs para obtener la estimación Bayesiana de los parámetros.

tros. Para encontrar la distribución a posteriori del vector θ_x , se necesita la función de verosimilitud condicional del modelo descrita en la sección anterior y las distribuciones a priori de los parámetros, que se describe a continuación.

La metodología aquí presentada es dada por Chen y Lee (1995) y Chen (1998), se asumen conocidos o son estimados en forma preliminar el número de regímenes l , los valores p_1, \dots, p_l , q_1, \dots, q_l . Elegimos las densidades a priori de la siguiente manera, para el vector B_j^* una multinormal de media $\theta_{0,i}$ y matriz de covarianzas V_j^{-1} , tal que $B_j^* \sim \mathbb{N}(\theta_{0,j}, V_j^{-1})$, para $\mathbf{h} \sim IG(\frac{v_j}{2}, \frac{v_j \lambda_j}{2})$ donde "IG" denota la función de distribución gamma invertida, para el vector $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{l-1})'$ decimos que su densidad a priori es constante $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{C} I(A)$ donde $C = \int \dots \int_A dr_1 \dots dr_{l-1}$, A es una región que satisface: $a \leq r_1 < \dots < r_{l-1} \leq b$, con a y b cuantiles convenientes de z_{t-d} , y cada régimen contiene al menos un $H\%$ del vector muestral (esto para asegurar inferencia válida), para el caso particular de dos regímenes, $f(r)$ es una uniforme continua definida en (a, b) . Por ultimo el valor d Sigue una uniforme discreta $d \sim U_d(0, 1, \dots, d_0)$ con probabilidad $Pr(d = i) = 1/(d_0 + 1)$, siendo d_0 un rezago máximo considerado. Asumimos independencia a priori entre todos los parámetros del modelo θ_x , además todos los hiperparámetros de las distribuciones se asumen conocidos.

Nuestro interés radica en la distribución marginal a posteriori de B_j^* , $(h^{(j)})^2$, \mathbf{r} y d usando alguna técnicas Bayesianas estándar Chen y Lee, (1995) obtenemos los siguientes resultados.

- (i) La función de distribución condicional a posteriori de B_j^* ($j = 1, \dots, l$) esta dada por:

$$p(B_j^* | x_{1,T}, z_{1,T}, \theta_{x-B_j^*}) \sim \mathbb{N}(\theta_j^*, \mathbb{V}_j^{*-1}) \quad (1.3)$$

donde $\theta_j^* = V_j^{-1}[(1/\{(h^{(j)})^2\})]A_j^* \mathbb{X}_j + V_j \theta_{0,i}$ y varianza $\mathbb{V}_j^* = [(1/\{(h^{(j)})^2\})]A_j^{*'} A_j^* + V_j$

donde $\theta_{x-B_j^*}$ es el vector de todos los parámetros suprimiendo el vector B_j^*

- (ii) La función de distribución condicional a posteriori de $(h^{(j)})^2$ esta dada por:

$$p((h^{(j)})^2 | x_{1,T}, z_{1,T}, \theta_{x-(h^{(j)})^2}) \sim IG\left(\frac{v_j + \eta_j}{2}, \frac{v_j \lambda_j + \eta_j s_j^2}{2}\right) \quad (1.4)$$

donde η_j es el número de observaciones en cada régimen y

$$\eta_j s_j^2 = (\mathbb{X}_j^* - A_j^* B_j^*)' (\mathbb{X}_j^* - A_j^* B_j^*),$$

- (iii) La función de densidad a posteriori para el valor \mathbf{r} dada por:

$$p(\mathbf{r} | x_{1,T}, z_{1,T}, \theta_{x-\mathbf{r}}) \propto \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \frac{(Y_j^* - X_j^* B_j)^T (Y_j^* - X_j^* B_j)}{[h^{(j)}]^2} \right\} \quad (1.5)$$

La cual no posee una distribución estándar conocida

- (iv) La función de densidad a posteriori para d es una multinomial con probabilidad dada por:

$$Pr(d = i | x_{1,T}, z_{1,T}, \theta_{x-d}) = \frac{f(x_{K+1,T} | x_{1,k}, z_{1,T}, \theta_{x-d}, d = i) Pr(d = i)}{\sum_{m=0}^{d_0} f(x_{K+1,T} | x_{1,k}, z_{1,T}, \theta_{x-d}, d = m) Pr(d = m)} \quad (1.6)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, d_0$

1.4. Algoritmo MCMC para la estimación de los parámetros

Todas las distribuciones condicionales a posteriori excepto la de \mathbf{r} son distribuciones estándar conocidas, se toma un tamaño muestral MCMC lo suficientemente grande y se descarta un periodo de calentamiento inicial y las iteraciones que queden se usan para el análisis. Se usa el siguiente esquema iterativo para construir las muestras a posterioris deseadas.

- 1 Se genera B_j^* usando ecuación 1.3
- 2 Se genera $(h^{(j)})^2$ usando la ecuación 1.4
- 3 Se genera \mathbf{r} usando la ecuación 1.5 y empleamos el algoritmo de Metropolis Hastings (MH) de caminata aleatoria.
- 4 Se genera d usando la ecuación 1.6

En el paso 3 del esquema iterativo se hace uso del algoritmo MH de caminata aleatoria el cual posee los siguientes pasos: en la iteración i se genera

- 1 Se genera $r^* = r^{(i-1)} + N(0, a^2)$
- 2 se acepta $r^i = r^*$ con probabilidad $\rho = \min\{1, f(r^*)/f(r^{(i-1)})\}$ donde $f(\cdot)$ esta dada en la ecuación (1.7) en caso contrario, hacer $r^{(i)} = r^{(i-1)}$

Se debe tener en cuenta una tasa de aceptación del algoritmo Metropolis Hastings, la cual está asociada al tamaño de a . En la práctica, podemos adecuar un tamaño de paso para producir una rápida convergencia de la MCMC.

1.5. Validación del modelo

Probar la adecuación de un modelo es parte importante de todo análisis de serie de tiempo. Para el modelo TARX se utiliza los residuales estandarizados $e_t = (X_t - X_{t|t-1})/h^{(j)}$ si $r_{j-1} < Z_{t-d} \leq r_j$ para $j = 1, 2, \dots, l$ donde

$$X_{t|t-1} = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} a_i^{(j)} X_{t-i} + \sum_{u=1}^{q_j} b_u^{(j)} Z_{t-u} \quad (1.7)$$

es el predictor un paso adelante para X_t , $t = K + 1, \dots, T$ con $K = \max\{p_1, \dots, p_j, q_1, \dots, q_j, d\}$ y T es la longitud del periodo muestral de $\{X_t\}$. $\{e_t\}$ debe aproximarse al comportamiento dinámico estocástico de un ruido blanco Gaussiano. Para lo cual se usan los gráficos Cusum para verificar que hay evidencia de una especificación correcta del modelo, la función de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial para observar autocorrelación, la función de autocorrelación y autocorrelación parcial para chequear presencia de heterocedasticidad, las estadísticas de normalidad de Jarque y Bera y de independencia de Ljung-Box.

1.6. Cálculo de la densidad predictiva

Este apartado está dedicada a la fase de pronósticos con modelos TARX, se adapta la metodología de Calderón y Nieto (2017) a los modelos TARX dado en (1.1)

Necesitamos calcular $\hat{X}_{T+h} = E(X_{T+h}|x_{1,T}, z_{1,T})$, que es la mejor predicción en el sentido de MECM (Mínimo Error Cuadrático Medio) para un modelo con l regímenes y $h \geq 1$. Siendo h , los pasos adelante a pronosticar. Este hecho fue señalado en Nieto (2008). Por tal razón, se usa estadística Bayesiana y la función de pérdida cuadrática como criterio de optimalidad, con el objetivo de hallar las densidades predictivas $f(x_{T+1}, \dots, x_{T+h}, z_{T+1}, \dots, z_{T+h}, \theta_x, \theta_z|x_{1,T}, z_{1,T})$ para $h \geq 1$ con las cuales se obtiene las esperanzas condicionales deseadas. Sin embargo, nuestra atención esta en las distribución predictiva conjunta a partir de la cual se pueden obtener las distribuciones marginales de interés. Con θ_x el vector de parámetros $\{X_t\}$ y θ_z el vector de parámetros de $\{Z_t\}$.

Para la especificación de la distribución marginal, asumimos que todas las suposiciones dadas en secciones anteriores respecto al modelo TARX se satisfacen. Además para todo t , X_1, X_2, \dots, X_t no existe causalidad tipo Granger con $\{Z_t\}$, y aplicando el método de composición y descomposición, se tiene que la densidad predictiva conjunta es:

$$\begin{aligned} & f(x_{T+1}, \dots, x_{T+h}, z_{T+1}, \dots, z_{T+h}, \theta_x, \theta_z|x_{1,T}, z_{1,T}) = \\ & f(x_{T+1}, \dots, x_{T+h}, z_{T+1}, \dots, z_{T+h}, \theta_z|\theta_x, x_{1,T}, z_{1,T})f(\theta_x|x_{1,T}, z_{1,T}) \\ & = \left\{ \prod_{i=1}^h f(z_{T+i}|z_{1,T+i-1}, \theta_z)f(x_{T+i}|z_{T+i}, x_{1,T+i-1}, z_{1,T+i-1}, \theta_x) \right\} f(\theta_x|x_{1,T}, z_{1,T}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde

- i $f(z_{T+i}|z_{1,T+i-1}, \theta_z)$ es la densidad kernel de transición de la cadena de Markov homogénea $\{Z_t\}$.
- ii $f(x_{T+i}|z_{T+i}, x_{1,T+i-1}, z_{1,T+i-1}, \theta_x)$ posee densidad normal con media $a_0^{(j)} + \sum_{m=1}^{p_j} a_m^{(j)} X_{T+i-m} + \sum_{u=1}^{q_j} b_u^{(j)} Z_{T+i-u}$ y varianza $(h^{(j)})^2$ si $r_{j-1} < z_{T+i-d} \leq r_j$ para algún $j = 1, \dots, l$ y
- iii $f(\theta_x|x_{1,T}, z_{1,T})$ es la densidad a posteriori de los parámetros del modelo TARX.

Además $x_{1,T+i-1} = (x_1, \dots, x_{T+i-1})$ y $z_{1,T+i-1} = (z_1, \dots, z_{T+i-1})$. Así, de la densidad predictiva conjunta mediante técnicas de simulación, se puede generar muestras de $z_{T+1}, x_{T+1}, z_{T+2}, x_{T+2}, \dots, z_{T+h}, x_{T+h}$ en forma secuencial con el siguiente algoritmo:

1.7. Algoritmo para la estimación de pronósticos

1. Se genera una muestra MCMC de $\theta_x^{(k)}$ de las densidades a posteriori de $f(\theta_x | x_{1,T}, z_{1,T})$ aplicando el esquema muestral de la sección (1.4) .
2. Se genera z_{T+1} de $f(z_{T+1} | z_{1,T}, \theta_z)$
3. Se genera $x_{T+1}^{(k)}$ de $f(x_{T+1} | z_{T+1}^{(k)}, x_{1,T}, z_{1,T}, \theta_x^{(k)})$
4. Se genera $z_{T+i}^{(k)}$ de $f(z_{T+i} | z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \theta_z)$
5. Se genera $x_{T+i}^{(k)}$ de $f(x_{T+i} | z_{T+i}^{(k)}, x_{1,T}, x_{T+1}^{(k)}, \dots, x_{T+i-1}^{(k)}, z_{1,T}, z_{T+1}^{(k)}, \dots, z_{T+i-1}^{(k)}, \theta_x^{(k)})$
6. Se repite los pasos 4 y 5 para $i = 2, 3, \dots, h$.

Con las muestras $\{z_{T+h}^{(k)}, x_{T+h}^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \dots, G$ con G la longitud de las cadenas y $h \geq 1$ se calculan las medias (pronósticos puntuales), desviaciones estándar (medida de incertidumbre) y cotas inferior y superior de intervalos a posteriori de Bayes del $(1 - \alpha)100\%$, (Intervalos creíbles) tanto como para la variable umbral como para la variable de interés. la incertidumbre de las estimaciones de los parámetros se involucran en el cálculo de pronósticos.

CAPÍTULO 2

El estudio de Simulación

Para evaluar la metodología propuesta se presenta el siguiente ejemplo simulado. Consideramos un modelo $TARX(2; 5, 6; 2, 1)$ dado por la ecuación:

$$X_t = \begin{cases} 1.32 + 0.2X_{t-1} + 0.5X_{t-4} - 0.10X_{t-5} + 0.3Z_{t-1} + 0.15Z_{t-2} + 2\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} < 4.6 \\ 1.92 + 0.2X_{t-1} + 0.3X_{t-2} + 0.5X_{t-4} - 0.10X_{t-5} - 0.15X_{t-6} + 0.7Z_{t-1} + 3\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \geq 4.6 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $Z_t = 1.8 + 0.6Z_{t-1} + e_t$ con $\{e_t\} \sim RBG(0, 1)$ independientes de $\{\epsilon_t\} \sim RBG(0, 1)$. Las series simuladas $\{X_t\}$ y $\{Z_t\}$, se tomó con un periodo muestral de 300 observaciones. Se pueden ver en la figura 2.1 que se presenta un comportamiento estable a través

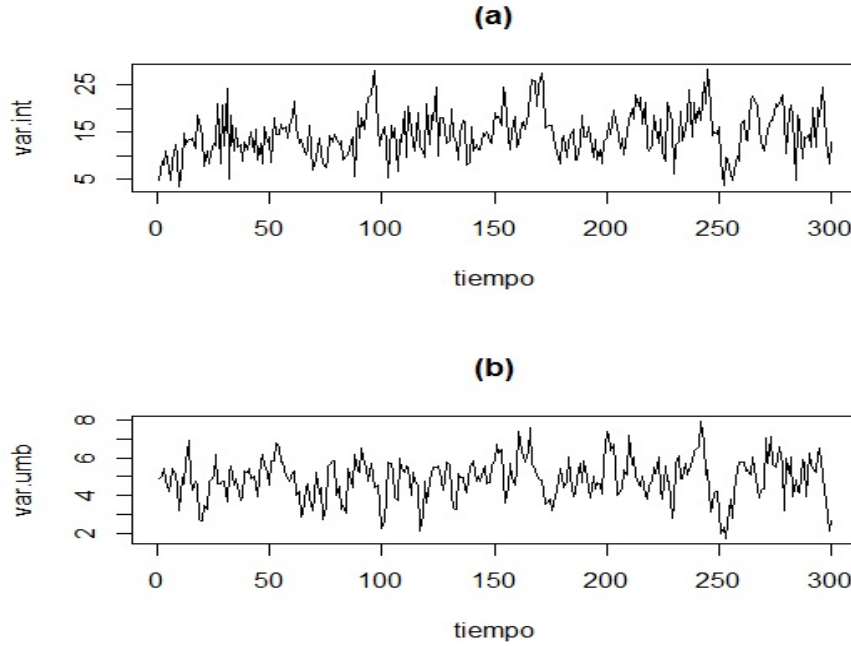


FIGURA 2.1. Variable de interés (a), variable umbral (b). del modelo simulado TARX con $n=300$

del tiempo, en las dos series de tiempo hay periodos de altas y bajas variabilidad, comportamiento común en estos tipos de modelos.

Considerando conocidos o estimados en forma preliminar los valores $L = 2$, $p_1 = 5$, $p_2 = 6$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$, se estima el resto de parámetros del modelo TARX, usando el algoritmo descrito en la sección (1.4).

Empleamos 100 repeticiones del algoritmo, 10.000 iteraciones y descartamos las primeras 6.000 como periodo de calentamiento. Las condiciones iniciales se fijaron de la siguiente manera: para el vector B_j^* un arranque de 0.05 para $(h^{(j)})^2$ un arranque de 0.20 para d un valor de 3 y para r la media de la variable umbral rezagada d periodos. los hiperparámetros utilizados para las a priori son: para el vector de las B_j^* una función distribución normal multivariada con media $\theta_{o1} = \phi'_{p_j+q_j+1} = \theta_{o2}$ ($j = 1, 2$) y varianza $V_j^{-1} = \text{diag}(0.10)$, para el vector de las $(h^{(j)})^2$ una función distribución gamma invertida de parámetros $v_i = 3$ y $\lambda_i = \hat{\sigma}^2/3$, donde $\hat{\sigma}^2$ es la varianza muestral de $\{X_t\}$, para r una uniforme continua con parámetros $a = P_{10}$ y $b = P_{90}$, donde P_k representa el percentil k -esimo de la variable umbral Z_{t-d} y d una uniforme discreta de parámetros $0, 1, 2, \dots, d_0$, estableciendo $d_0 = 5$ como el rezago máximo, se fija el escalar positivo $a^2 = 0.005$ que requiere el algoritmo Metropolis hastings de caminata aleatoria. por ultimo garantizamos por lo menos un 10 % de las observaciones en cada régimen, con el propósito de obtener buenas estimaciones sobre el valor r

TABLA 2.1. Resultados de la simulación del modelo TARX obtenido de 100 repeticiones con $n=300$.

Parámetro	Verdadero	Estimación	d.e	I.C 95 %	Cobertura	Sesgo
$a_0^{(1)}$	1.32	1.26	0.95	0.59, 3.33	98	-0.05
$a_1^{(1)}$	0.20	0.19	0.05	0.07, 0.32	98	0.00
$a_2^{(1)}$	0.00	0.00	0.04	-0.08, 0.08	97	0.00
$a_3^{(1)}$	0.00	0.00	0.04	-0.08, 0.08	99	0.00
$a_4^{(1)}$	0.50	0.49	0.04	0.09, 1.08	97	0.00
$a_5^{(1)}$	-0.10	-0.09	0.04	-0.19, -0.01	95	0.00
$b_1^{(1)}$	0.30	0.28	0.24	0.19, 0.76	96	-0.01
$b_2^{(1)}$	-1.15	-0.10	-0.21	-0.52, -0.01	97	0.04
$a_0^{(2)}$	1.92	1.24	1.75	0.90, 3.68	98	-0.67
$a_1^{(2)}$	0.20	0.19	0.06	0.05, 0.32	91	0.00
$a_2^{(2)}$	0.30	0.30	0.07	0.16, 0.40	95	0.00
$a_3^{(2)}$	0.00	0.00	0.06	-0.13, 0.12	96	0.00
$a_4^{(2)}$	0.50	0.49	0.06	0.36, 0.62	97	0.00
$a_5^{(2)}$	-0.10	-0.08	0.07	-0.23, -0.05	98	0.01
$a_6^{(2)}$	-0.15	-0.15	0.06	-0.28, -0.10	96	0.00
$b_1^{(2)}$	0.7	0.83	0.31	0.22, 1.45	99	0.13
$(h^{(1)})^2$	4	4.31	0.51	3.42, 5.4	86	0.31
$(h^{(2)})^2$	9	9.08	1.13	7.13, 11.55	94	0.08
r	4.6	4.59	0.01	4.57, 4.62	99	0.00

Se elige la media como estimador puntual, el valor de cada parámetro es tomado como la media de las 100 repeticiones, la mediana, la desviación estándar (d.e), el intervalo creíble al 95 %, la cobertura, es decir, el porcentaje de veces que el valor verdadero cae en el

intervalo creíble, junto con el sesgo se muestran en las Tablas 2.1

El método utilizado para la estimación de los parámetros muestran poco o ningún sesgo y una desviación estándar muy próxima a cero que es muy razonable. Además, es correcto elegir el rezago como 1, dado a que es acertado 99 veces entre las 100 replicas, se puede ver que las estimaciones puntuales son buenas además todos los intervalos de credibilidad al 95 % contienen los parámetro verdaderos.

Para evaluar la convergencia de las cadenas MCMC, producimos gráficos de autocorrelación para las últimas 4.000 iteraciones en algunos parámetros en las Figuras 2.2.

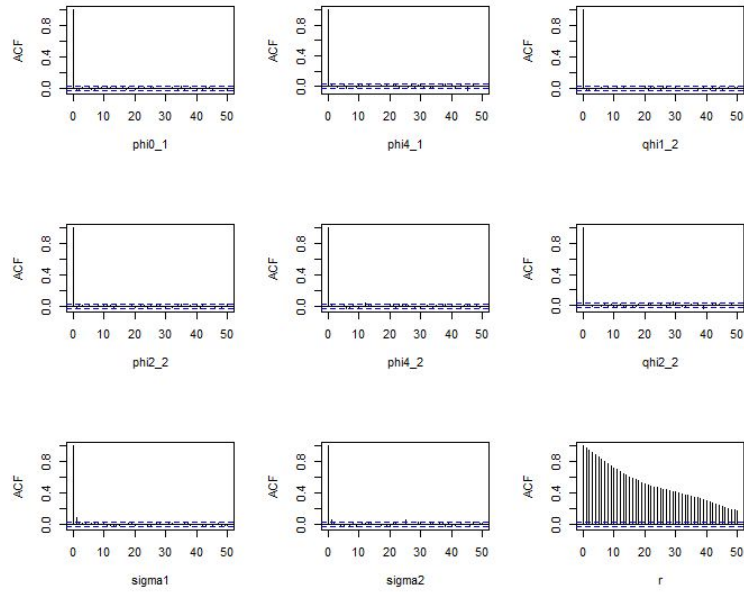


FIGURA 2.2. FAC para algunas cadenas del modelo simulado TARX

Las autocorrelaciones muestran un decaimiento rápido, lo que indica una rápida convergencia, la única cadena que presenta un comportamiento diferente es r pero es natural dado a su función a posteriori no estándar, en resumen, estamos muy seguros de que la cantidad de iteraciones quemadas es lo suficientemente grande como para llegar a la convergencia y así mantenemos este número junto con las iteraciones totales a lo largo del estudio de simulación.

Dada la importancia de asegurar la convergencia de las muestras MCMC a continuación veremos la traza de las últimas 4000 iteraciones, tomando como referencia los parámetros seleccionados en la figura (2.2). Las muestras MCMC en las últimas 4000 iteraciones presentan un comportamiento estacionario es decir su media y varianza son constante, reafirmando nuevamente que es apropiado esa cantidad de iteraciones, por otro lado vemos que r presenta un comportamiento diferente pero aclaramos que es natural dado su función de densidad.

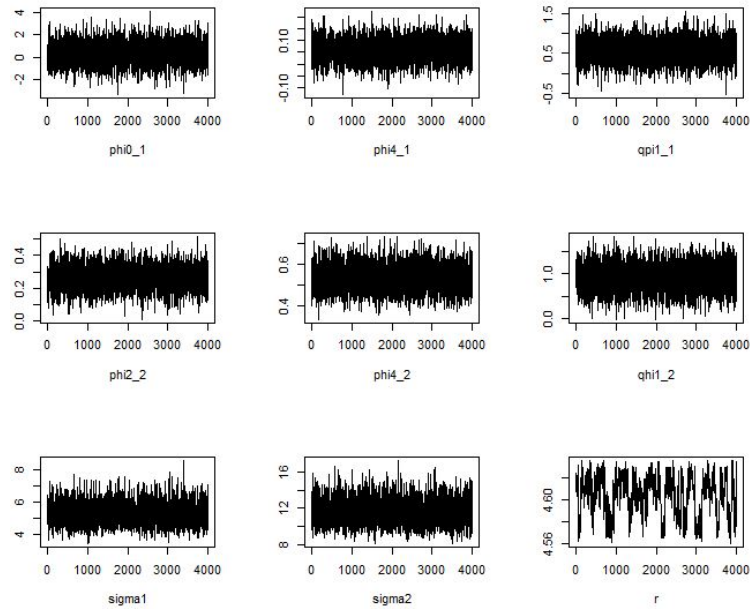


FIGURA 2.3. Gráficas de las muestras simuladas MCMC de las últimas 4000 iteraciones

Respecto a la validación del modelo dado en la sección (1.5), se puede apreciar en la figura 2.4 que los residuales estandarizados presentan un comportamiento estable y su distribución es simétrica.

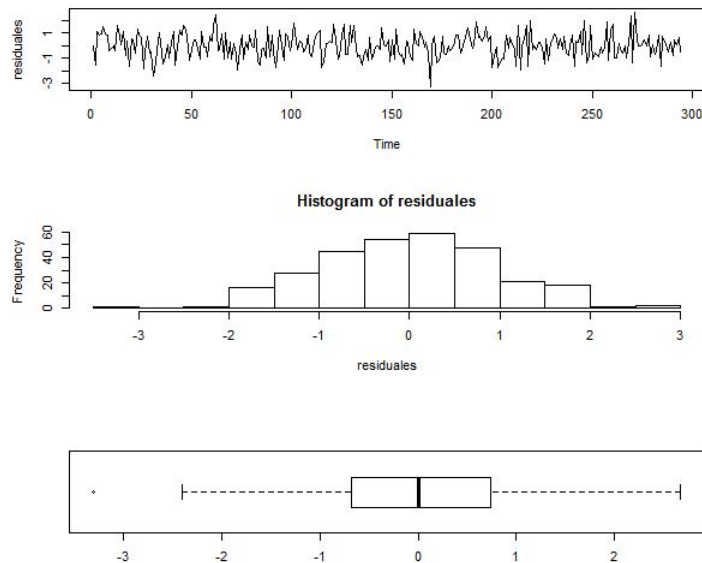


FIGURA 2.4. Traza, histograma y box plot de los residuales simulados

Las funciones de autocorrelación muestral y de autocorrelación muestral parcial, presentadas en las figuras 2.5, indican no correlación serial en los residuales estandarizados y en los residuales estandarizados al cuadrado no presencia de heterocedasticidad.

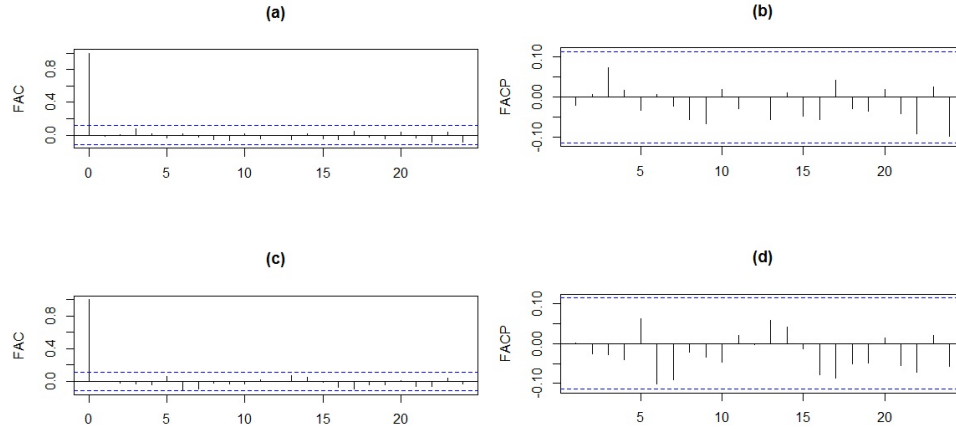


FIGURA 2.5. FAC de los residuales (a), FACP de los residuales (b), FAC de los residuales al cuadrado (c), FACP de los residuales al cuadrado (d)

La prueba de normalidad de Jarque y Bera 0.14 (0.93) y de independencia de Ljung-Box 0.12 (0.72) no rechazan la hipótesis de normalidad e independencia respectivamente (valor p entre paréntesis). Adicionalmente, la gráfica CUSUM muestra que no hay evidencia de una especificación incorrecta del modelo.

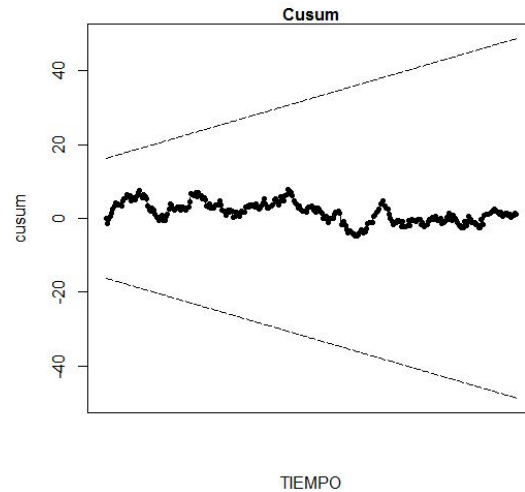


FIGURA 2.6. Gráfico CUSUM de los residuos del modelo simulado TARX.

A continuación llevamos a cabo el estudio de simulación para la fase de pronósticos, para verificar el comportamiento de las predicciones realizando 100 réplicas. Para el cálculo de la densidades predictiva se tuvo en cuenta la incertidumbre de la estimación de los parámetros, usando el tipo de pronósticos ex post, fijamos las últimas cinco observaciones de las series de tiempo $\{X_t\}$, $\{Z_t\}$ como horizonte de predicción con el ánimo de poder comparar las observaciones conocidas con las predicciones obtenidas. usando el algoritmo descrito en la sección (1.7)

TABLA 2.2. Pronóstico para la variable X_t .

Horizonte (h)	X_{T+h}	\hat{X}_{T+h}	Desviación estándar	I.C 90 %	I.C 95 %
1	11.14	11.28	2.52	[7.15,15.42]	[6.35,16.22]
2	11.20	11.62	3.64	[6.09,17.91]	[5.27,19.12]
3	11.03	11.44	4.06	[5.55,18.57]	[4.76,19.87]
4	11.15	11.63	4.31	[5.63,19.38]	[4.84,20.76]
5	11.62	11.39	4.67	[4.79,19.85]	[3.89,21.38]

TABLA 2.3. Pronóstico para la variable Z_t .

Horizonte (h)	Z_{T+h}	\hat{Z}_{T+h}	Desviación estándar	I.C 90 %	I.C 95 %
1	4.34	4.41	0.99	[2.77,6.05]	[2.45,6.36]
2	4.40	4.45	1.16	[2.52,6.36]	[2.16,6.73]
3	4.40	4.47	1.22	[2.46,6.48]	[2.08,6.86]
4	4.57	4.48	1.24	[2.44,6.52]	[2.05,6.91]
5	4.71	4.49	1.24	[2.44,6.54]	[2.05,6.93]

los pronósticos de las series de tiempo $\{X_t\}$, $\{Z_t\}$, se presentan en la Tabla 2.2 y Tabla 2.3 respectivamente, junto con sus intervalos creíbles al 90 % y 95 %. En ambos casos, se evidencia un comportamiento en los pronósticos muy cercano a las observaciones, lo que muestra que la metodología propuesta posee buenos resultados para realizar pronósticos.

en conclusión las estimaciones puntuales de los pronósticos son muy cercanos a los verdaderos, aunque los intervalos creíbles son muy anchos, investigaciones futuras deberán estar enfocadas en reducir el ancho de los intervalos.

Una aplicación en economía

3.1. Análisis exploratorio de las series de tiempo

Para ilustrar la metodología propuesta analizamos a continuación dos series de tiempo de carácter económico de Colombia. La variable dependiente analizada es la inversión privada y la explicativa es la deuda externa pública, estas variables son medidas a través de la formación bruta de capital fijo (FBKF) como proporción del producto interno bruto y de la deuda externa pública del gobierno central (DEXT) como proporción del producto interno bruto, el periodo muestral es desde el segundo trimestre del año 1994 hasta el tercer trimestre del año 2007 (54 observaciones en frecuencia trimestral). Las series son tomadas del Banco de la Republica

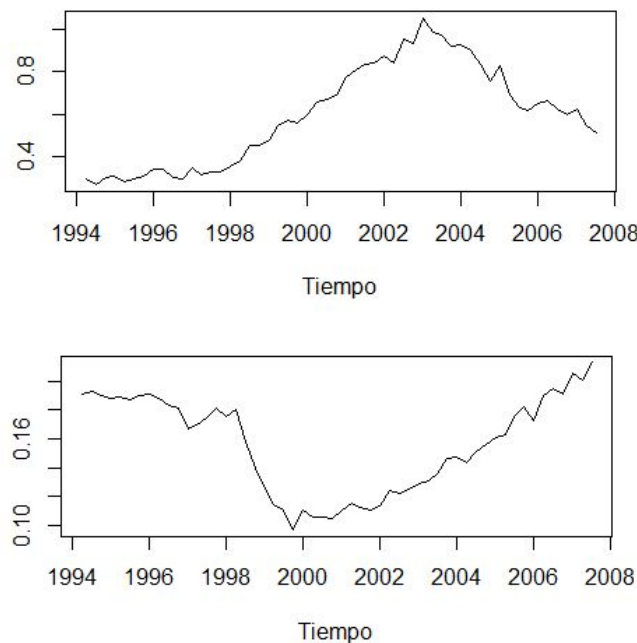


FIGURA 3.1. Deuda externa pública trimestral (a), inversión privada trimestral (b)

Estas series han sido analizadas en Rubio (2003) mediante un modelo de regresión lineal y en Salamanca y Monroy (2008) mediante un modelo TAR siguiendo la metodología propuesta por Nieto (2005),

La Figura 3.1 (a) presenta la evolución de la deuda pública externa como proporción del PIB durante los años de 1994 al 2007. Desde el periodo de 1993 hasta 1998 la deuda se incrementó de manera gradual, coincidiendo con un marco de liberalización de la economía Colombiana impuesto por un proceso de apertura internacional de mercados y de un notable crecimiento del gasto privado. Entonces en busca de financiamiento, el sector público decidió emitir bonos en el mercado interno (TES) y externo, aumentando la participación en el valor del saldo de la deuda por estas nuevas fuentes de financiación.

La figura 3.1 (b) muestra la evolución de la inversión privada trimestral para Colombia en el periodo comprendido entre 1994 y 2007. La tendencia creciente que venía presentando se revertió para el año 1999. Con el inicio de las crisis financieras a finales de 1997 la economía Colombiana atravesó por una disminución en los flujos de capital que redujo los niveles de financiamiento externo registrados entre 1998 y 1999. Este estancamiento de los flujos de deuda externa estuvo acompañado por la reducción de la inversión privada debido a la contracción económica ocurrida en 1999. Sin embargo, es de señalar que los flujos de endeudamiento externo se recuperaron entre 2000 y 2001.

Usualmente, se tiene dos periodos en la economía las cuales son de expansión y contracción por ello se considera dos regímenes para los modelos TARX y TAR. Además, se toma como variable umbral $\{Z_t\}$ el crecimiento de la inversión privada trimestral de Colombia, ya que refleja precisamente dichos periodos de la economía Colombiana.

Las variables a analizar son construidas de la siguiente manera, a través del crecimiento de la inversión privada y crecimiento de la deuda externa pública.

$$\begin{aligned} X_t &= \left[\ln \left(\frac{FBKF_t}{PIB_t} \right) - \ln \left(\frac{FBKF_{t-1}}{PIB_{t-1}} \right) \right] \\ Z_t &= \left[\ln \left(\frac{DEXP_t}{PIB_t} \right) - \ln \left(\frac{DEXP_{t-1}}{PIB_{t-1}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Las dos series de estudio se presentan en la Figura 3.2

Ajustamos ahora un modelo lineal autorregresivo $AR(p)$ a la variable umbral. Realizando la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial muestral (Figura 3.3), se puede observar según (b) que un proceso autorregresivo de orden cuatro es adecuado para ajustar la variable.

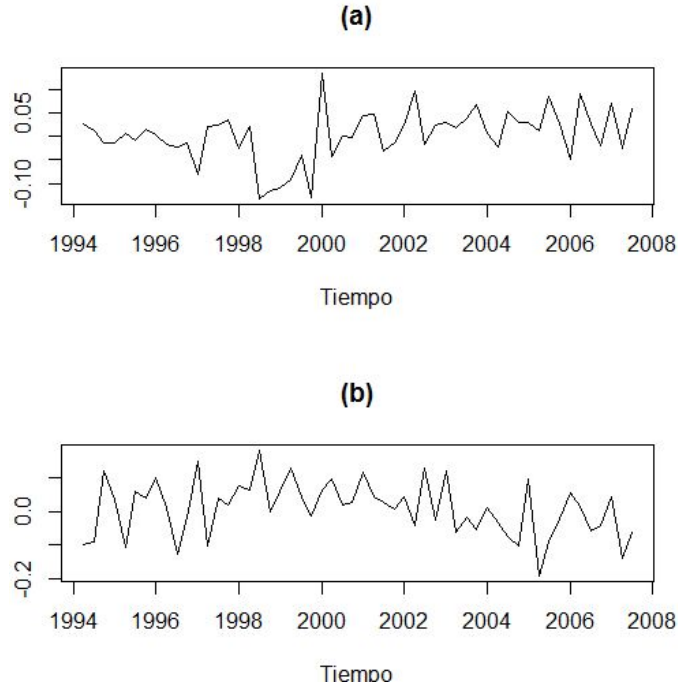


FIGURA 3.2. Crecimiento inversión privada (a), crecimiento deuda externa pública (b)

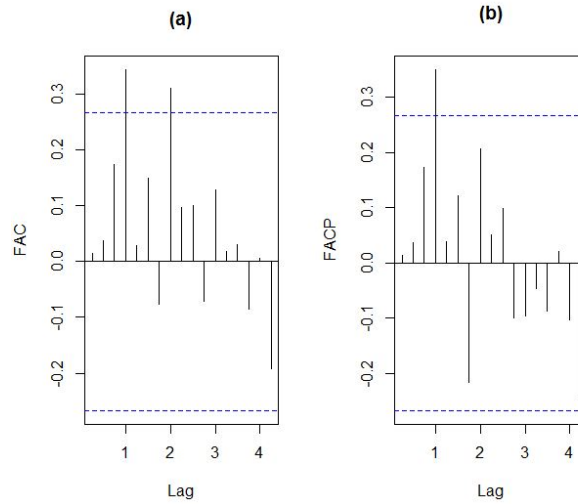


FIGURA 3.3. Función de autocorrelación muestral (a), Función de autocorrelación parcial muestral (b)

así entonces el modelo ajustado a la variable umbral es el siguiente. $Z_t = 0.0029 + 0.038Z_{t-3} + 0.38Z_{t-4} + 0.005e_t$ con $\{e_t\} \sim RBG(0,1)$ Lo que significa que la deuda externa pública es afectada entre tres y cuatro trimestre de manera autorregresiva.

3.2. Ajuste y pronósticos de un Modelo TARX

Para realizar la prueba de no linealidad de umbrales entre el crecimiento de la Inversión Privada y el crecimiento de la Deuda Externa Pública se emplea la estadística de prueba propuesta por Tsay (1989), en la que se contrasta la hipótesis nula de linealidad tipo $ARX(p, q)$ contra la alternativa de no linealidad de umbrales tipo TARX, a partir de una regresión ordenada estimada por mínimos cuadrados recurrentes.

La prueba de no linealidad de umbrales se realizó para diferentes rezagos de la variable umbral Z_{t-d} , con $d = 0, 1, 2, \dots, 7$ para determinar los órdenes autorregresivo máximos de p y q se ajustó un modelo autorregresivo lineal con entrada exógena $ARX(p, q)$ a la variable de interés. De acuerdo al criterio de mínimo DIC los valores estimados fueron $p=2$, $q=5$ con un $DIC=-176.8498$ aunque de entrada estos valores no rechazan la hipótesis de linealidad de umbrales para ningún rezago tomado de Z_{t-d} , son fijados como valores iniciales máximos y se varían desde desde p , q empezando desde cero hasta los órdenes previamente establecidos hasta poder rechazar la hipótesis nula, los valores escogidos son $p=2$ y $q=3$, con $DIC=-176.7885$

TABLA 3.1. Prueba de no linealidad de umbrales con covariable

Rezagos de la variable umbral								
	p=2				q=3			
Test	0	1	2	3	4	5	6	7
F	0.589	0.827	1.983	1.108	0.671	1.663	0.542	0.639
P-valor	0.736	0.556	0.091	0.374	0.673	0.157	0.772	0.697

La hipótesis nula de linealidad de umbrales es rechazada para el rezago $d = 2$ a un nivel de significancia del 10 % para los ordenes autorregresivo $p=2$ y $q=3$. Por lo tanto un modelo TARX sería apropiado para las series de tiempo consideradas, y se fijan los órdenes autorregresivo de $p=2$ y $q=3$ como valores máximos que se toman para los dos regímenes del modelo TARX. La Figura 3.4 ilustra el crecimiento de la inversión como proporción del PIB y el crecimiento de la deuda externa como proporción del PIB rezagada 2 trimestre.

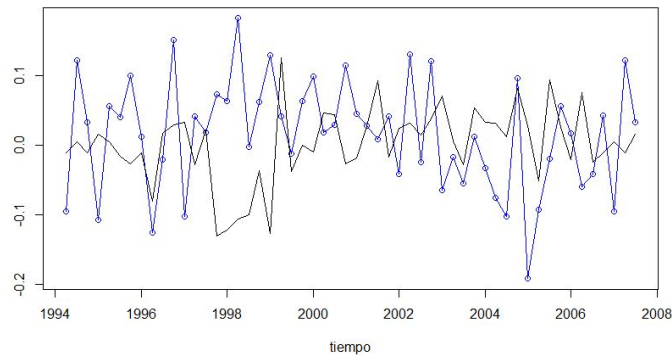


FIGURA 3.4. Crecimiento FBKF/PIB —, Crecimiento DEXP/PIB rezagada dos trimestre -o-

En esta gráfica se aprecia alta correlación negativa entre las variables, particularmente entre 1994-2001. Además se observa poca variabilidad en el crecimiento de la inversión exceptuando el periodo 1998-1999 caracterizado por bajas tasas de crecimiento de la inversión privada y del PIB, y en particular por la contracción económica ocurrida en 1999.

Fijados los valores l, p y q . La estimación del resto de parámetros desconocidos del modelo TARX se realizara en forma simultánea, siguiendo la metodología descrita en la sección 1.4. se efectuaron 20.000 iteraciones, tomando un periodo de calentamiento de 12000, Los hiperparámetros y las condiciones de arranque del algoritmo del muestreador de Gibbs, se toman igual a las del ejemplo simulado.

TABLA 3.2. Parámetros estimados del modelo TARX .

	régimen 1		régimen 2	
	coeficientes	I.C 95 %	coeficientes	I.C 95 %
$a_0^{(j)}$	0.035 (0.19)	0.0201 , 0.0390	-0.015 (0.01)	-0.0710 , -0.0112
$a_1^{(j)}$	-0.16 (1.14)	-0.2933 , -0.0358	-0.005 (0.17)	-0.1921 , 0.1635
$a_2^{(j)}$	0.52 (1.27)	0.3947 , 0.6615	0.24 (0.15)	0.0881 , 0.4045
$b_1^{(j)}$	0.33 (0.53)	0.2551 , 0.4113	0.25 (0.11)	0.1556 , 0.3660
$b_2^{(j)}$	-0.09 (1.34)	-0.2402 , 0.0474	0.06 (0.16)	-0.0651 , 0.1959
$b_3^{(j)}$	0.17 (0.32)	0.0703 , 0.3089	0.03 (0.16)	-0.1284 , 0.2289
$(h^{(j)})^2$	0.0020		0.0030	
r	0.006 (0.02)	0.0059 , 0.0063	Tasa de aceptación	89 %

Errores estándar en paréntesis. IC: Intervalo de credibilidad.

En la Tabla 3.2 se encuentran los coeficientes estimados en cada régimen con sus correspondientes errores estándar e intervalos de credibilidad al 95 %.

Los resultados anteriores muestran que valor estimado del rezago es $d = 2$ y coincide con el valor hallado en la prueba de no linealidad de umbrales con covariable además el umbral identificado es $r = 0.006$ este valor r tiene una tasa de aceptación correspondiente a 89 % y corresponde al crecimiento de la deuda externa pública rezagada en dos trimestre es decir que $Z_{t-2} < 0.006$. De este modo los dos regímenes están constituidos de la siguiente manera, para los índices en la deuda menores a 0.006 que corresponde al pago del saldo de la deuda o a bajas tasas de endeudamiento estará asociado al régimen uno y para los saldos mayores al índices de 0.006 corresponderán al segundo régimen, es decir el régimen uno estará modelando los tiempos de la inversiones altas y el segundo estará modelando los tiempos de inversiones bajas. La diferencia de signo en los intercepto para los diferentes regímenes confirman la evidencia a cerca de la correlación negativa entre el crecimiento de la inversión y el crecimiento de la deuda externa.

Ahora como no todos los coeficientes resultaron significativos, presentamos a continuación la ecuación $TARX(2, 2, 2, 3, 1)$ ajustada a las series.

$$X_t = \begin{cases} 0.035 - 0.16X_{t-1} + 0.52X_{t-2} + 0.33Z_{t-1} + 0.12Z_{t-3} + 0.0020\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} < 0.006 \\ -0.015 + 0.24X_{t-2} + 0.25Z_{t-1} + 0.0030\epsilon_t & \text{si } Z_{t-2} \geq 0.006 \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $Z_t = 0.0029 + 0.038Z_{t-3} + 0.38Z_{t-4} + 0.005\epsilon_t$ con $\{\epsilon_t\} \sim RBG(0, 1)$ mutuamente independiente de $\{\epsilon_t\} \sim RBG(0, 1)$.

Observemos el efecto negativo del endeudamiento externo público sobre la inversión privada. Mientras que para el régimen uno las tasas de crecimiento promedio de la inversión son del 3.5%, para el régimen dos son del -1.5%. Obtener esa tasa de crecimiento promedio negativa para el régimen dos significa que para los tiempos de crecimiento negativo en la expectativa de inversión el sobreendeudamiento esta afectando la formación del capital privado, por último, para el régimen dos observamos que los dos coeficientes autorregresivos son positivos dejando ver que el país ha sido responsable a la hora de hablar de la deuda externa

Para determinar la convergencia a estacionariedad de cada una de las cadenas MCMC se realiza una gráfica que muestra la evolución de los cuantiles de la muestra como función del número de iteraciones usadas. Esta gráfica se logra usando el comando `cumuplot(.)` de la librería de coda de R. la figura 3.5 muestra la gráfica *cumuplot* para algunos parámetros, garantizando así la convergencia de las muestras MCMC.

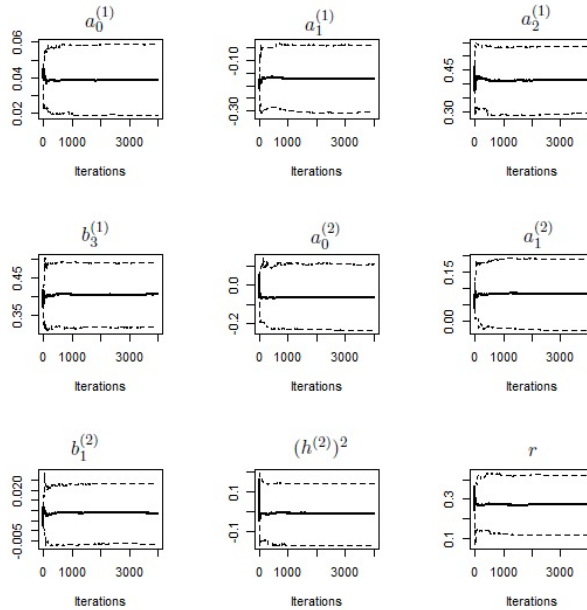


FIGURA 3.5. Gráfica *cumuplot* para verificar la convergencia de las cadenas del Modelo TARX.

La figura 3.6 muestra la traza de algunos parámetros dejando ver su estados estacionario

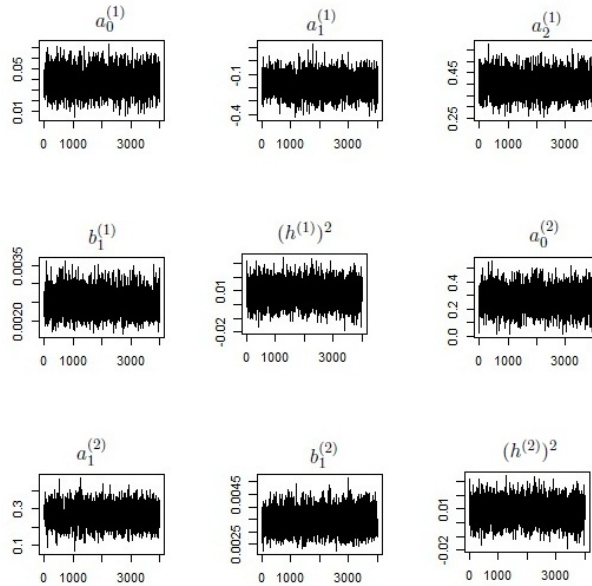


FIGURA 3.6. Gráficas de las muestras a posteriori del modelo TARX.

la hipótesis nula de las prueba de normalidad de Jarque y Bera 1.30 (0.52) y de independencia de Ljung-Box 0.03 (0.86) no se rechazan (valor P entre paréntesis).

la figura 3.7 muestran que los residuos presentan un comportamiento estable y su distribución es simétrica.

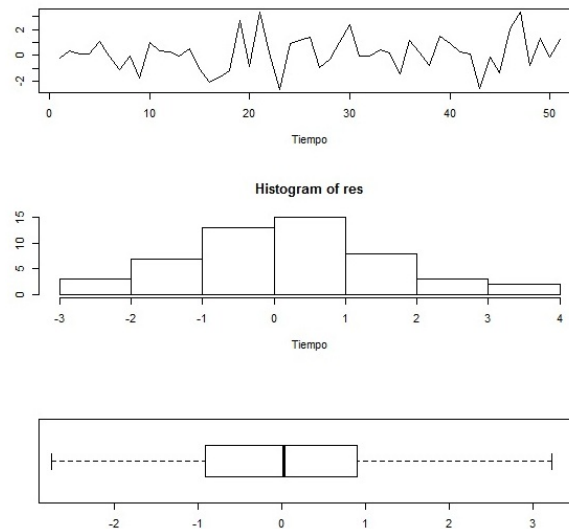


FIGURA 3.7. Traza, histograma y box plot de los residuales del modelo TARX

Las funciones de autocorrelación muestral y de autocorrelación parcial muestral, presentadas en las Figuras 3.8, indican no autocorrelación serial en los residuales estandarizados y los residuales estandarizados al cuadrado la no heterocedasticidad en el modelo.

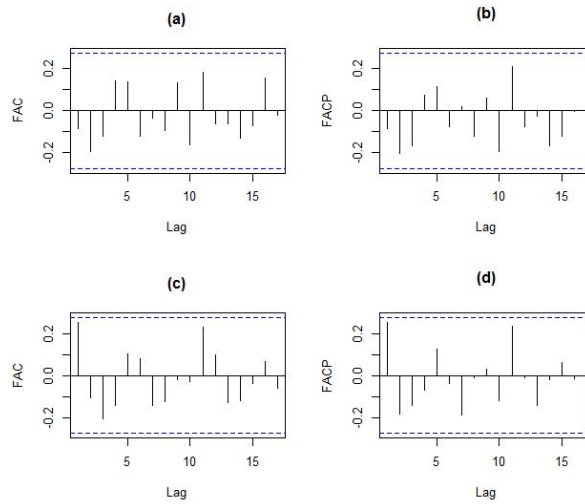


FIGURA 3.8. FAC de los residuales (a), FACP de los residuales (b), FAC de los residuales al cuadrado (c), FACP de los residuales al cuadrado (d), del modelo TARX

Por último la gráfica CUSUM muestra que no hay evidencia de una especificación incorrecta del modelo.

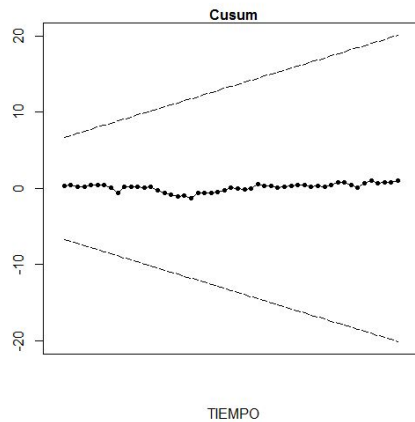


FIGURA 3.9. Gráfico CUSUM de los residuales del Modelo TARX.

Para la fase de pronósticos para el modelo reservamos las últimas 3 observaciones correspondientes a los tres primeros trimestre del año 2007 para efectos de comparación, es decir, que nuestra base de datos para esta fase corresponde al periodo comprendido desde el segundo trimestre del año 1994 hasta el cuarto trimestre del año 2006.

Una vez se ha ajustado y validado el modelo TARX con dicho periodo muestral, se procede a realizar pronósticos con una longitud del horizonte de predicción igual a tres. Para el cálculo de la densidad predictiva se tuvo en cuenta la incertidumbre de la estimación de los parámetros.

Los pronósticos de la variable del crecimiento de la inversión privada trimestral y el crecimiento de la deuda externa pública trimestral, se presentan en la Tabla 3.3 y Tabla 3.4, junto con sus intervalos creíbles al 90 % y 95 %.

TABLA 3.3. Pronóstico ex post del modelo TARX para la variable de interés.

Horizonte (h)	X_{T+h}	\hat{X}_{T+h}	RMSE	I.C 90 %	I.C 95 %
1	0.072	0.080	0.0168	[0.0058 , 2.4347]	[0.0480 , 1.4063]
2	-0.025	-0.030	0.1138	[-4.5573 , -0.0020]	[-4.5034 , -0.0042]
3	0.060	0.015	0.0678	[0.0010 , 3.4987]	[0.0015 , 2.9025]

TABLA 3.4. Pronóstico ex post del modelo TARX para la variable umbral.

Horizonte (h)	Z_{T+h}	\hat{Z}_{T+h}	RMSE	I.C 90 %	I.C 95 %
1	0.043	0.0530	0.5464	[0.0225 , 3.3164]	[0.0113 , 3.4785]
2	-0.035	-0.0244	0.4610	[-3.1242 , -0.0022]	[-3.4240 , -0.0225]
3	-0.064	-0.0544	0.5697	[-3.0890 , -0.0068]	[-3.4146 , -0.0074]

Las predicciones a corto plazo que se realizaron con el modelo TARX resultaron muy próximas a los datos observados con los que podemos concluir que es eficiente a la hora de pronosticar, por otro lado las predicciones resultaron significativas al 90 % y 95 %

3.3. Ajuste y pronósticos de un Modelo TAR

En esta sección nos dedicaremos a estudiar el modelo TAR. Es decir que no consideraremos la variable umbral como covariable. Con este fin iniciamos de nuevo todo lo relacionado a determinar el valor p donde se rechace la no linealidad de umbrales y fijar las condiciones iniciales sobre este modelo.

La prueba de no linealidad de umbrales se realizó para diferentes rezagos de la variable umbral Z_{t-d} , con $d = 0, 1, 2, \dots, 7$, para determinar el orden máximo de p se ajustó un modelo autorregresivo lineal $AR(p)$ a la serie de tiempo $\{X_t\}$. De acuerdo al criterio DIC el valor estimado fue $p=2$, con un $DIC=-163.7505$.

En la Tabla 3.5 se encuentran los resultados de la prueba de no linealidad de umbrales para $p = 2$. En este caso, la hipótesis nula de linealidad tipo $AR(p)$ es rechazada para el rezago $d=1$ a un nivel de significancia del 10 %.

TABLA 3.5. Prueba de no linealidad de umbrales

Rezagos de la variable umbral								
p=2								
Test	0	1	2	3	4	5	6	7
F	0.253	2.508	0.409	0.916	0.560	1.169	0.470	1.137
P-valor	0.858	0.070	0.746	0.440	0.643	0.332	0.704	0.345

La Figura 3.10 ilustra el crecimiento de la inversión como proporción del PIB y el crecimiento de la deuda externa como proporción del PIB rezagada 1 trimestre.

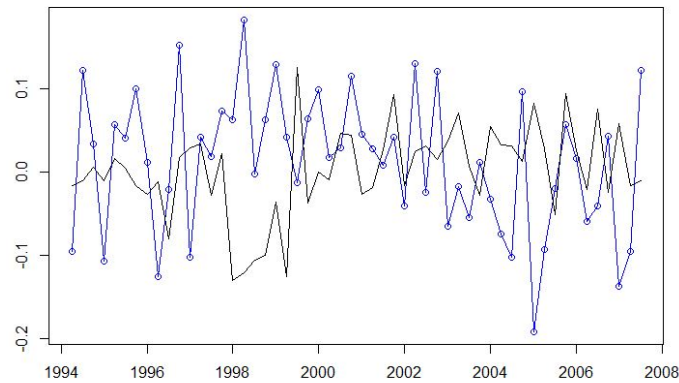


FIGURA 3.10. Crecimiento FBKF/PIB —, Crecimiento DEXP/PIB rezagada un trimestre -o-

La Figura 3.10 muestra alta correlación negativa entre las variables, particularmente entre 1994-2001. Además se observa poca variabilidad en el crecimiento de la inversión exceptuando el periodo 1998-1999 caracterizado por bajas tasas de crecimiento de la inversión privada, y en particular por la contracción económica ocurrida en 1999. Por lo demás, el comportamiento de la inversión es bastante estable a lo largo del periodo de estudio. Adicionalmente se resalta la reducción de la inversión, luego de periodos de alto endeudamiento.

Fijados los valores l y p , la estimación del resto de parámetros desconocidos del modelo TAR se realizara en forma simultánea, siguiendo el algoritmo de la sección 1.4 adaptada a los modelos TAR. se efectuaron 20.000 iteraciones, tomando un periodo de calentamiento de 12000, Los hiperparámetros y las condiciones de arranque del algoritmo del muestreador de Gibbs, se toman igual a las del ejemplo simulado.

TABLA 3.6. Parámetros estimados del modelo TAR.

	régimen 1		régimen 2	
	coeficientes	I.C 95 %	coeficientes	I.C 95 %
$a_0^{(j)}$	0.0124 (0.01)	0.0060 , 0.0196	-0.0086 (0.01)	-0.0091 , 0.0070
$a_1^{(j)}$	-0.0560 (0.28)	-0.1828 , 0.0717	0.3753 (0.44)	0.1562 , 0.6040
$a_2^{(j)}$	0.23 (0.25)	0.1049 , 0.3603	0.2651 (0.40)	0.0410 , 0.4837
$(h^{(j)})^2$	0.0024	0.0016 , 0.043	0.0029	0.0022 , 0.0045
r	0.0467 (0.04)	0.0061 , 0.1161	Tasa de aceptación	80 %

El valor estimado del rezago es $d = 1$ y coincide con el valor hallado en la prueba de no linealidad de umbrales los resultados de la tabla 3.6 muestra que el valor umbral corresponde a 0.0467 esta valor tiene una tasa de aceptación de 80 %. La dinámica de

$\{X_t\}$ está determinada por los valores del crecimiento de la deuda externa pública que cumplan lo siguiente $Z_{t-1} < 0.0467$. De este modo los regímenes están constituidos de la siguiente manera: para los índices en la deuda menores a $r = 0.0467$ que corresponde al pago del saldo de la deuda o a bajas tasas de endeudamiento estará asociado al régimen uno y para los saldos mayores al índices de $r = 0.0467$ corresponderán al segundo régimen, es decir el primero estará modelando los tiempos de la inversiones altas y el segundo de igual forma estará modelando los tiempos de inversiones bajas. La diferencia de signo en los intercepto para los diferentes regímenes confirman la evidencia de la correlación negativa entre el crecimiento de la inversión y el crecimiento de la deuda externa.

Observemos el efecto negativo del endeudamiento externo público sobre la inversión privada. Mientras que para el régimen uno las tasas de crecimiento promedio de la inversión es del 1.24 %, para el régimen dos es del -0.86 %. Obtener tasas de crecimiento de la inversión privada positivas en el corto plazo no implica necesariamente que el endeudamiento no esté afectando las expectativas de inversión presente, ya que como se observa, en el régimen dos, los coeficientes de los rezagos son positivo, Lo cual indica que un buen desempeño de la economía en periodos anteriores puede contrarrestar el efecto del endeudamiento.

Ahora como no todos los coeficientes resultaron significativos, presentamos a continuación la ecuación del modelo $TAR(2, 2, 2)$ ajustados a las series de tiempo.

$$X_t = \begin{cases} 0.0124 + 0.23X_{t-2} + 0.0024\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} < 0.0467 \\ -0.0086 + 0.3753X_{t-1} + 0.2652X_{t-2}\epsilon_t & \text{si } Z_{t-1} \geq 0.0467 \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $Z_t = 0.0029 + 0.038Z_{t-3} + 0.38Z_{t-4} + 0.005e_t$ con $\{e_t\} \sim RBG(0, 1)$ mutuamente independiente de $\{\epsilon_t\} \sim RBG(0, 1)$.

Presentamos las gráficas correspondiente garantizando la convergencia de las cadenas MCMC del modelo TAR. La figura 3.11 muestra la traza de los parámetros dejando ver su estados estacionario

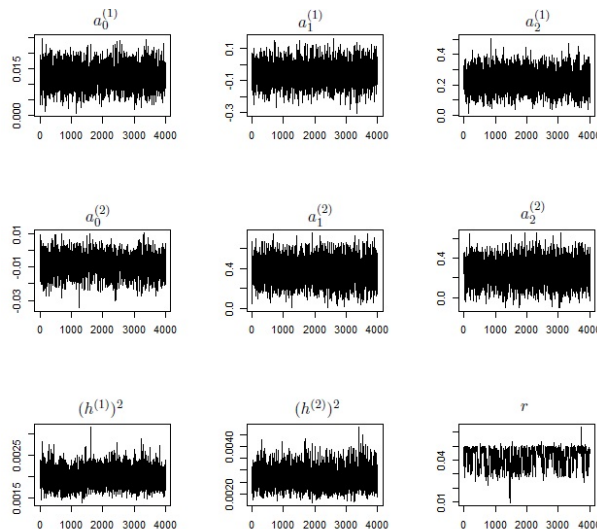


FIGURA 3.11. Traza de las muestras a posteriori del modelo TAR.

La figura 3.12 muestra la gráfica Cumuplot para los parámetros seleccionado anteriormente, garantizando así la convergencia de las muestras MCMC

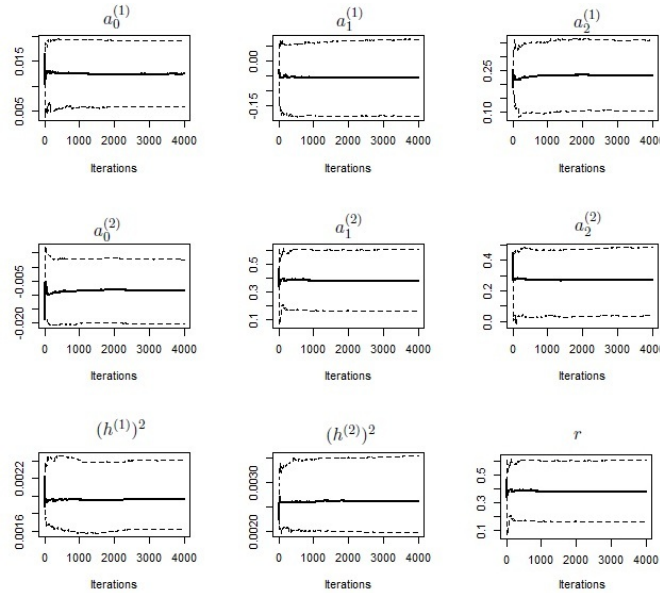


FIGURA 3.12. Gráfica cumuplot para verificar la convergencia de las cadenas del modelo TAR.

Para verificar la idoneidad del modelo, usamos algunas pruebas formales, la función de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial muestral de los residuales estandarizados y residuales estandarizados al cuadrado, junto con los gráfica CUSUM, la hipótesis nula de las prueba de normalidad de Jarque y Bera 1.14 (0.56) y de independencia de Ljung-Box 0.06 (0.43) no se rechazan (valor P entre paréntesis). Adicionalmente se aprecia en la figura 3.13 que los residuos presentan un comportamiento estable y su distribución es simétrica

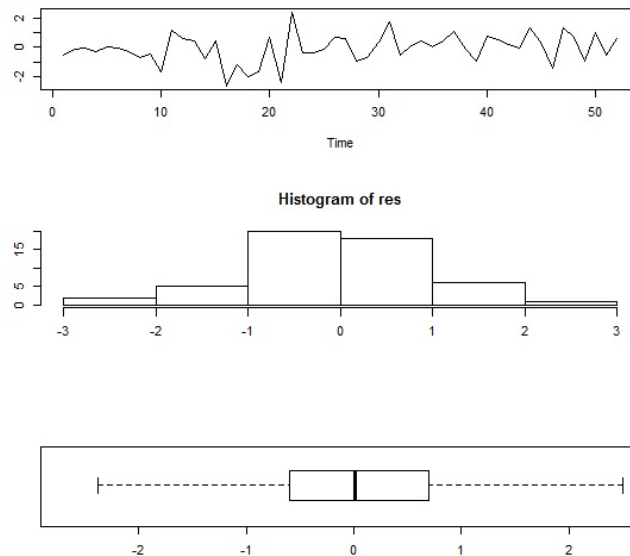


FIGURA 3.13. Traza, histograma y box plot de los residuales del modelo TAR

Las funciones de autocorrelación muestral y de autocorrelación parcial muestral, presentadas en las figuras 3.14, indican no correlación serial en los residuales estandarizados y en los residuales estandarizados al cuadrado la no existencia de heterocedasticidad.

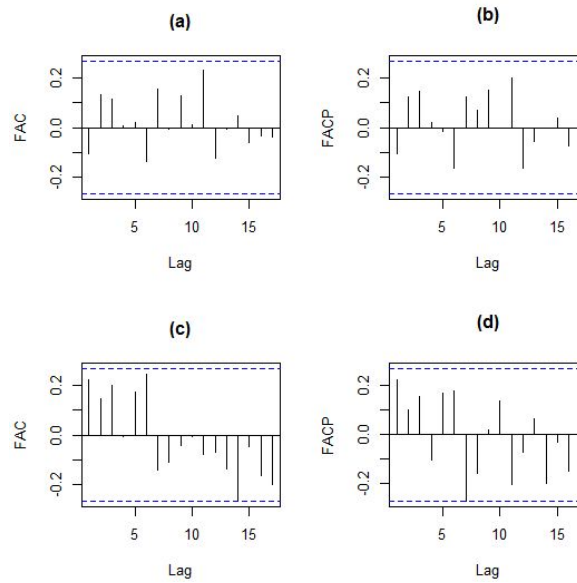


FIGURA 3.14. FAC de las residuales (a), FACP de los residuales (b), FAC de los residuales al cuadrado (c), FACP de los residuales al cuadrado (d), del modelo TAR

Por último la gráfica CUSUM muestra que no hay evidencia de una especificación incorrecta del modelo.

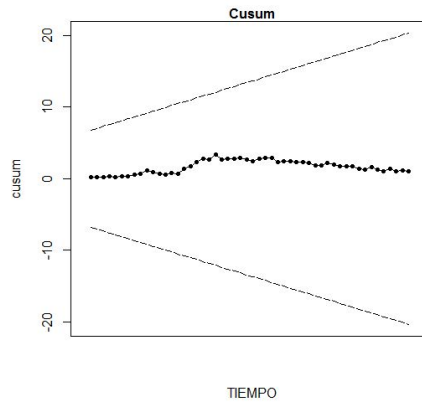


FIGURA 3.15. Gráfico CUSUM de los residuales estandarizados del modelo TAR.

Para la fase de pronósticos para el modelo TAR reservamos las últimas 3 observaciones correspondientes a los tres primeros trimestre del año 2007 para efectos de comparación, es decir, que nuestra base de datos para esta fase corresponde al periodo comprendido desde el segundo trimestre del año 1994 hasta el cuarto trimestre del año 2006.

Una vez se ha ajustado y validado el modelo TAR a las series de tiempo, se procede a realizar pronósticos con una longitud del horizonte de predicción igual a tres. Para el cálculo de la densidad predictiva se tuvo en cuenta la incertidumbre de la estimación de los parámetros.

Los pronósticos de la variable del crecimiento de la inversión privada y el crecimiento de la deuda externa pública, se presentan en la Tabla 3.7 y Tabla 3.8, junto con sus intervalos creíbles al 90 % y 95 %.

TABLA 3.7. Pronóstico ex post del modelo TAR para la variable de interés.

Horizonte (h)	X_{T+h}	\hat{X}_{T+h}	RMSE	I.C 90 %	I.C 95 %
1	0.072	0.050	0.1490	[0.0142 , 1.2049]	[0.0506 , 3.7127]
2	-0.025	-0.010	0.5253	[-3.1299 , -0.0090]	[-1.4211 , -0.0096]
3	0.060	0.2004	0.0815	[0.0002 , 4.8566]	[0.4257 , 3.2275]

TABLA 3.8. Pronóstico ex post del modelo TAR para la variable de umbral.

Horizonte (h)	Z_{T+h}	\hat{Z}_{T+h}	RMSE	I.C 90 %	I.C 95 %
1	0.043	0.0530	0.5464	[0.0225 , 3.3164]	[0.0113 , 3.4785]
2	-0.035	-0.0244	0.4610	[-3.1242 , -0.0022]	[-3.4240 , -0.0225]
3	-0.064	-0.0544	0.5697	[-3.0890 , -0.0068]	[-3.4146 , -0.0074]

Las predicciones a corto plazo que se realizaron con el modelo TAR resultaron muy próximas a las los datos observados exceptuando la última predicción que no fue tan acertada, con lo que podemos concluir que el modelo TAR es eficiente a la hora de pronosticar, por otro lado las predicciones resultaron significativas al 90 % y 95 %.

La estimación del coeficiente de determinación RMSE para los modelos TARX y TAR determinan que el mejor modelo a la hora de pronosticar es el modelo TARX Sin embargo cabe resaltar que respecto a los residuales estandarizados el modelo TAR presenta mejor ajuste, también resaltamos la capacidad de los modelos para capturar los distintos rasgos de las serie de tiempo analizadas.

Conclusiones


En este trabajo de grado se utilizó una metodología Bayesiana con técnicas MCMC dada por Chen y Lee (1995) y Chen (1998) para realizar estimaciones de parámetros de los modelos TARX y TAR, además del cálculo de pronósticos de dichos modelos adaptando la metodología de Calderón y Nieto (2017). Se realizó un estudio de simulación para determinar la eficiencia de la metodología propuesta, las simulaciones resultaron optimas de igual forma se empleó la metodología descrita al crecimiento de la deuda externa pública trimestral (variable umbral) y el crecimiento de la inversión privada trimestral en Colombia (variable de interés) en un periodo muestral 1994 -2007. Se utilizó un modelo TARX y TAR con dos regímenes para las series de tiempo en mención. Tanto para el modelado, como para el cálculo de pronósticos se tiene mejor resultado usando el modelo TARX. En estudios posteriores, se esperaría estimar todos los parámetros del modelo en simultánea y reducir los anchos de los intervalos creíbles que presentan los pronósticos

Bibliografía

- Calderón, S. y Nieto, F.H.(2017), Bayesian Analysis of Multivariate Threshold Autoregressive Models with Missing Data, *Communications in Statistics, Theory and Methods* **46**, 296-318
- Chen, C.W.S. (1998), A Bayesian Analysis of Generalized Threshold Autoregression Models, *Statistics and Probability Letters* **40**, 15-22.
- Chen, C.W.S. y Lee, J.C. (1995), Bayesian Inference of Threshold Autoregression Models, *Journal of Time Series Analysis* **16**, 483–492.
- Hansen, E. (2011), Threshold autoregression in economics, *Statistics and Its Interface*, **4**, 123-127.
- Hoyos, M. (2006), *Una Aplicación del Modelo no Lineal TAR en Economía*, Tesis de Grado Maestría en Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Nieto, F.H. (2005), Modeling Bivariate Threshold Autoregressive Processes in the Presence of Missing Data, *Communications in Statistics, Theory and Methods* **34**, 905–930.
- Nieto, F.H. (2008), Forecasting With Univariate TAR Models, *Statistical Methodology* **5**, 263–273.
- Rubio, O., Ojeda, J. y Montes, E. (2003). Deuda Externa, Inversión y Crecimiento en Colombia, 1970-2002, *Borradores de Economía, Banco de la República*, **272**.
- Salamanca, A. y Monroy, V. (2008), Deuda Externa Pública e Inversión en Colombia 1994-2007: Evidencia de un Modelo no Lineal TAR, *Borradores de Economía, Banco de la República*, **543**.
- So, M. y Chen, C.W.S. (2003), Subset Threshold Autoregression, *International Journal of Forecasting* **22**, 49–66.
- Tong, H. (2015), Threshold models in time series analysis, Some reflections, *Journal of Econometrics*, **2**, 485-491.

Tsay, R. (1998), Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes, *Journal of the American Statistical Association* **84**, 231–240

Vivas, K. (2011), *Modelación no Lineal de la Tasa de Desempleo Urbano para Colombia*, Tesis de Grado Maestría en Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar

☒

No Autorizar

☐

Motivo: _____

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado

☒

Artículo

☐

Proyecto de Investigación

☐

Libro

☐

Parte de libro

☐

Documento de conferencia

☐

Patente

☐


Informe técnico

☐

Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)

☐

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 2 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “**...Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable**” y 37 “**...Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro**”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “**los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores**” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo: Comparación de Pronósticos con Modelos TAR y TARX en Algunas Series Económicas Colombianas

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Profesional en Matemáticas con Énfasis en Estadística


- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Artículo publicado en revista:

- Capítulo publicado en libro:

- Conferencia a la que se presentó:

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 3 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

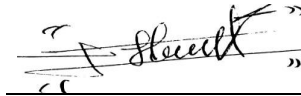
Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **05** Mes: **07** Año: **2018**

Autores:

Firma

Nombre: Holmes Fabián Molina Alape



C.C. 1117820638

Nombre: _____

C.C. _____

Nombre: _____

C.C. _____

Nombre: _____

C.C. _____

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.

FIGURA 18